ΑΣΚΗΣΗ 1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y\cdot e^{x\cdot y}+2x)\,dx+(x\cdot e^{xy}-2y)\,dy=0 \quad , \; y(0)=2$$

ΛΥΣΗ

Ελέγχω αν είναι άμεσα ολοκληρώσιμη

και θεωρώ $M(x,y)=y\cdot e^{xy}+2x$ και $N(x,y)=x\cdot e^{xy}-2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=xy\cdot e^{xy}+e^{xy} \quad \text{και} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=e^{xy}+y\cdot x\cdot e^{xy} \quad \text{ίσα}$$

άρα η εξίσωση άμεσα ολοκληρώσιμη (ή πλήρης)

Έχουμε,

$$f(x,y)=\int (y\cdot e^{xy}+2x)\,dx = e^{xy}+x^2+g(y)$$

με g συνεχώς παραγωγίσιμη

Θα πρέπει

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cdot e^{xy}-2y=N(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot e^{xy}+0+g'(y)=x\cdot e^{xy}-2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g(y)=-y^2+c$$

Επομένως, $f(x,y)=e^{xy}+x^2-y^2+c_1$

όλες οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο

$$e^{xy}+x^2-y^2=c_1$$

Για $x=0$ έχουμε

$$e^{0\cdot 2}+0^2-2^2=c_1 \Rightarrow c_1=-3$$

Άρα η λύση του προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$e^{xy}+x^2-y^2=-3$$

Ασκηση 2 (ασκ 12 σελ. 55)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$2y\cdot y' = e^{x^2+y^2/x} + x^2+y^2/x - 2x$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z = \frac{x^2+y^2}{x} \Rightarrow xz = x^2+y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z'x + z = 2x + 2y\cdot y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'x + z - 2x = e^{z} + z - 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'x = e^{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = e^{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{-z}\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ldots$$ χωριστή μεταβλ.

Ασκηση 3 (Ασκ 5 σελ. 54)

Να λυθεί η εξίσωση

$$xy' - y\log y = x^2\cdot y$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z = \log y \Rightarrow z' = \frac{1}{y}\cdot y' \Rightarrow y\,z' = y'$

Η εξίσωση γράφεται

$$xyz' - yz = x^2y \Rightarrow xz' - z = x^2 \Rightarrow \ldots \boxed{z = \ldots}$$

και καταλήγουμε στο ...

$$y(x) = e^{x^2+cx}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ασκηση 4 (ασκ 27 σελ 57)

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' + 2y = q(x), \quad \text{όπου } q(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Η $q(x)$ συνεχής $\Rightarrow q(x)$ ολοκληρώσιμη

$$y(x) = e^{-2x}\left(c + \int e^{2x} q(x)\,dx\right)$$

{ ή και με ορισμένο ολοκλωρ}

Ασκηση 4 (ασκ. 10 σελ 54)

$$\cos y \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot \sin y = 1 \quad \text{για} \quad y(1)=0$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $z=\sin y \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = \cos y \cdot y'$

άρα $z' + \frac{1}{x} z = 1$ γραμμική α' τάξης για $x>0$

ή $xz' + z = x \overset{x>0}{\Rightarrow} (x \cdot z)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow x \cdot z = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{x}{2} + \frac{c}{x} \Rightarrow \sin y = \frac{x}{2} + \frac{c}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \text{Arc}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$ $\left[0 = \frac{1}{2} + \frac{c}{1} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}\right]$

οπου θα πρέπει:

$-1 \leq \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \leq 1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{4} \leq \frac{x}{2} \leq 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{5}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$

Ασκηση 5

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+2} - e^{\frac{x+y+1}{x+2}}$$

ΛΥΣΗ

Θέτω $y = Y + y_0$ και $x = X + x_0$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{Y + y_0 + X + x_0 + 1}{X + x_0 + 2} = \frac{Y + X + (y_0 + x_0 + 1)}{X + (x_0 + 2)}$$

$$\begin{cases} y_0 + x_0 + 1 = 0 \\ x_0 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \end{matrix}$$

Άρα,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y+X}{X} - e^{\frac{X+Y}{X}} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{Y}{X} + 1 - e^{1 + \frac{Y}{X}}$$

Θέτω $\frac{Y}{X} = z \Rightarrow Y = zX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{dz}{dX} X + z \Rightarrow$

$$\Rightarrow x z' + z = 1 + z - e^{1+z} \Rightarrow x \cdot z' = 1 - e^{1+z} \Rightarrow$$

χωριζομ. μεταβλ.

$$\Longrightarrow \frac{1}{1-e^{1+z}}\, dz = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1-e^{1+z}}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+e^{1+z}-e^{1+z}}{1-e^{1+z}}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \left(1 - \frac{e^{1+z}}{1-e^{1+z}}\right) dz = \int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow z = \dots$$

Άσκηση 6

Ας είναι $p, q \in C([0,\infty))$ με
$|p(x)| \geq |q(x)|$, $x \geq 0$

Θεωρούμε τις εξισώσεις:

$(P): \quad y' + p y = 0$

$(Q): \quad y' + q y = 0$

Να εξετασθεί αν είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση
"Αν όλες οι λύσεις της (Q) τείνουν προς το 0 για $x \to \infty$ τότε όλες οι λύσεις της (P) τείνουν προς το 0 για $x \to \infty$"

ΛΥΣΗ

$(P): \quad y' + p y = 0 \Rightarrow y(x) = c e^{-\int p(x)\,dx}$

$(Q): \quad y' + q y = 0 \Rightarrow y(x) = c \cdot e^{-\int q(x)\,dx}$

Δηλ. ΘΔΟ

αν $y(x) = c \cdot e^{-\int q(x) dx} \to 0$ τότε $y(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx} \to 0$

Αυτό είναι ΨΕΥΔΕΣ

Και θα φέρουμε ένα αντιπαράδειγμα: (εργασία για σπίτι)